

Aufgaben zur linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

1.0 Prüfen Sie, ob die drei Vektoren paarweise kollinear, komplanar oder keines von beiden sind.

1.1 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ☐

1.2 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐

1.3 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐

1.4 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐

2.0 Bestimmen Sie diejenigen reellen Zahlen für den Parameter a, für die der jeweils letzte Vektor eine Linearkombination der vorherigen Vektoren ist.

2.1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2.2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☒ 2.3 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☒

3 Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ komplanar sind. ☐

4 Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+3 \\ a+4 \\ a+5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a+6 \\ a+7 \\ a+8 \end{pmatrix}$ für alle Werte

von $a \in \mathbb{R}$ komplanar sind. ☒

5 Bestimmen Sie alle Werte von $t \in \mathbb{R}$, für die die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ 4+t \end{pmatrix} \text{ linear abhängig bzw. unabhängig sind. } \textcircled{?}$$

6.0 Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.

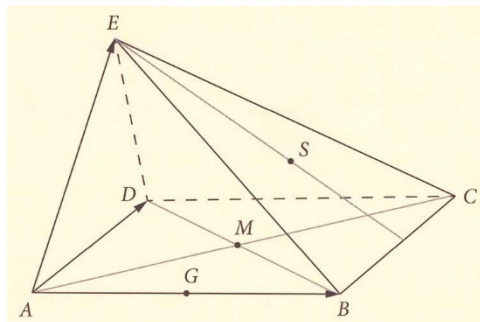
Untersuchen Sie $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit. ●

6.1 $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} \quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

6.2 $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$

7.0 Gegeben sind die linear unabhängigen Kantenvektoren

$\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$ und $\vec{AE} = \vec{c}$ einer Pyramide ABCDE mit dem Parallelogramm ABCD als Grundfläche. S ist Schwerpunkt im Dreieck BCE. M ist die Mitte des Grundparallelogramms und G die Mitte der Strecke $\overline{AB}$.



7.1 Drücken Sie die Vektoren $\vec{EG}$ und $\vec{MS}$ möglichst einfach durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus. ○

7.2 Untersuchen Sie, ob $\vec{EG}$ und $\vec{MS}$ linear unabhängig sind. ●

8 Gegeben ist die Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ und der Vektor $\vec{a}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

aus $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis B.

Berechnen Sie die Vektorkoordinaten von $\vec{a}_B$ bezüglich der kanonischen

Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐

9.0 Gegeben ist die Menge $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, wobei $k \in \mathbb{R}$, und der

Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

9.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Menge B keine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. ☒

9.2 Ermitteln Sie die Koordinaten von $\vec{u}$ bezüglich B für $k = -1$. ☐

10.0 Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -4 \end{pmatrix}$

mit $k \in \mathbb{R}$.

10.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Menge $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ keine

Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. ☒

10.2 Ermitteln Sie die Koordinaten von $\vec{b}$ bezüglich B für $k = -2$. ☐

11.0 Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wahr und welche falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

11.1 Jeder beliebige Vektor lässt sich als Linearkombination dreier linear unabhängiger Vektoren darstellen. ☐

11.2 Wenn sich ein Vektor $\vec{a}$ durch drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ darstellen lässt, dann sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐

11.3 Nimmt man zu drei linear unabhängigen Vektoren einen vierten Vektor hinzu, so sind diese vier Vektoren linear abhängig. ☐

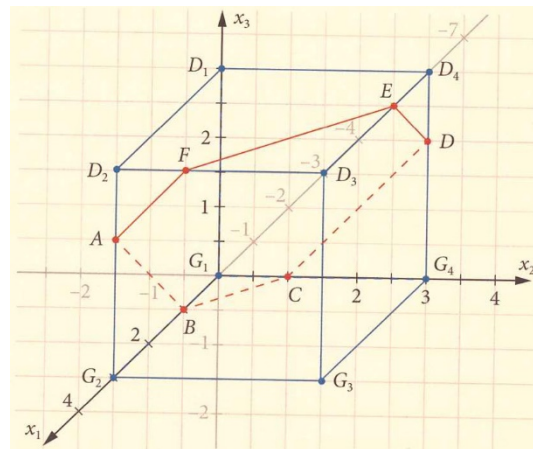
11.4 Bilden drei Vektoren eine geschlossene Vektorkette, so sind sie linear abhängig. ☐

11.5 Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig. Ist der Vektor $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, so sind auch alle drei Vektoren linear unabhängig. ☐

11.6 Der Ansatz $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} + m \cdot \vec{c} = \vec{0}$ hat immer mindestens eine Lösung. ☐

11.7 Drei Vektoren, von denen einer der Nullvektor ist, sind immer linear abhängig. ☐

12.0 In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel W_1 der Kantenlänge 3 gegeben.



12.1 Die Punkte $D_1(0/0/3)$, $G_2(3/0/0)$ und $D_3(3/3/3)$ sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.

Begründen Sie ausführlich, dass das Dreieck gleichschenkelig ist. ☐

12.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks. ☒

12.3 Die Pyramide $D_1D_2G_2D_3$ wird vom Würfel abgeschnitten.

Bestimmen Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens das Pyramidenvolumen einnimmt. ☒

12.4 Die Punkte A, B, C, D, E und F teilen die Würfelseiten im Verhältnis 1 : 2.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E und F an. ☒

12.5 Zeigen Sie: Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DE}$ sind linear abhängig. ☐

12.6 Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{CD} + t \cdot \overrightarrow{DE} = \vec{0}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch. ☐

12.7 Die Punkte R, S, T, U, V und W bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks, deren Ecken auf den Würfelkanten liegen.

Es gilt: $R(1,5/0/0)$, $S(3/0/1,5)$ und $T(3/1,5/3)$.

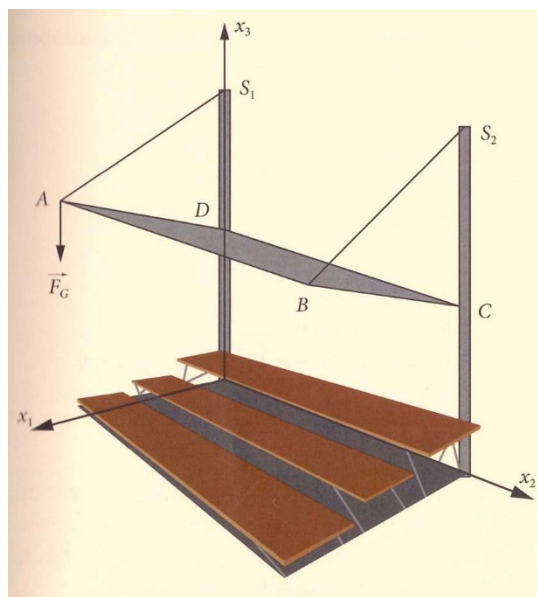
Zeichnen Sie einen Würfel W_2 mit der Kantenlänge 3 im Schrägbild und ergänzen Sie die Punkte R, S und T. Zeichnen Sie auch die Punkte U, V und W ein und verbinden Sie die Punkte zu einem regelmäßigen Sechseck.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte U, V und W an. ●

12.8 Berechnen Sie den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks. ⊗

12.9 Die drei Vektoren $\overrightarrow{G_1D_3}$, $\overrightarrow{G_2D_4}$, $\overrightarrow{G_3D_1}$ in Richtung der Raumdiagonalen des Würfels W_1 bilden die Basis eines Vektorraumes. Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ bezüglich dieser neuen Basis. ⊗

- 13.0 Für ein großes Sportevent möchte die berufliche Oberschule Regensburg eine Zuschauertribüne mieten. Die Abbildung zeigt modellhaft eine mietbare Zuschauertribüne, die auf einer horizontalen Fläche aufgebaut werden muss. Die Punkte $A(4/0/8)$, $B(4/10/8)$, C und $D(0/0/5)$ sind die Eckpunkte eines rechteckigen schrägen Daches, das die Zuschauer vor Sonne und Regen schützen soll. Das Dach ist mit zwei Seilen an zwei 10 m hohen Masten befestigt, die auf der horizontalen Fläche senkrecht stehen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m.



- 13.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes C. ☐
- 13.2 Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Daches. ☐
- 13.3 Im Diagonalenschnittpunkt M des Rechtecks ABCD soll ein Strahler angebracht werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes M. ☐
- 13.4 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 . ☒

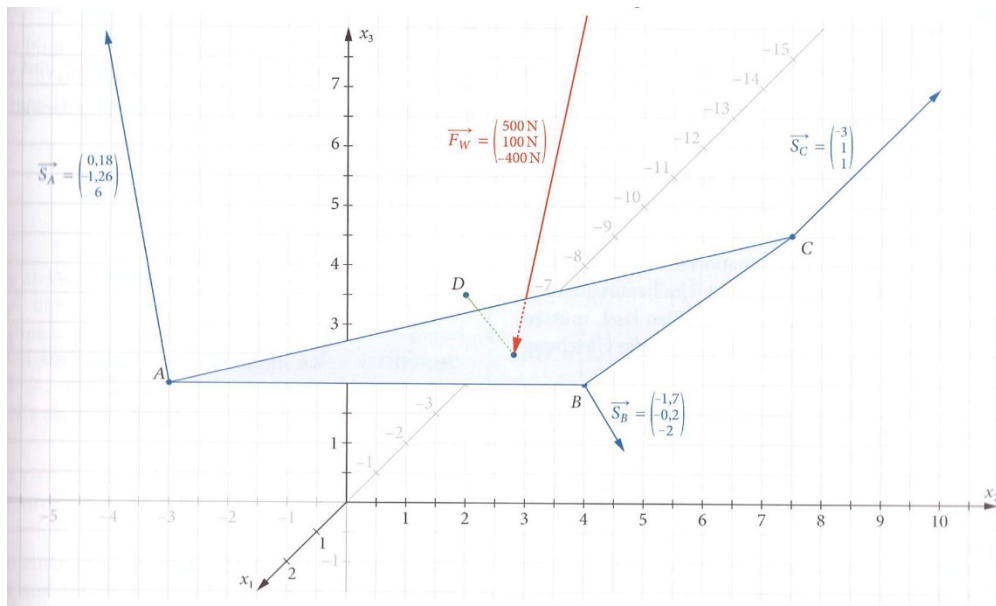
13.5 Im Punkt A wirkt eine Gewichtskraft $\vec{F}_G$ mit $|\vec{F}_G| = 10000 \text{ N}$ senkrecht zur

horizontalen Fläche. Diese Kraft kann in eine Komponente $\vec{F}_S$ des Zugseiles

und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt, zerlegt werden.

Ermitteln Sie den Betrag der Kräfte $|\vec{F}_S|$ und $|\vec{F}_D|$. ●

14.0 Auf der Terrasse von Familie Huber ist ein großes dreieckiges Sonnensegel gespannt. Die Punkte A(2/-2/3), B(0/4/2) und C(1/8/5) bilden die Ecken des Dreiecks. Da das Sonnensegel oft starkem Wind ausgesetzt ist, macht Herr Huber sich Sorgen, ob die Konstruktion hält.



14.1 Ein Windstoß mit der Kraft $\vec{F}_w = \begin{pmatrix} 500 \text{ N} \\ 100 \text{ N} \\ -400 \text{ N} \end{pmatrix}$ zerzt im Schwerpunkt des

Sonnensegels an den Befestigungsseilen. Die Kraft kann in eine Komponente

$\vec{F}_A$, die in Richtung des Befestigungsseiles im Punkt A wirkt, in eine

Komponente $\vec{F}_B$, die in Richtung des Befestigungsseiles im Punkt B wirkt und

in eine Komponente $\vec{F}_C$, die in Richtung des Befestigungsseiles im Punkt C wirkt, zerlegt werden.

Ermitteln Sie den Betrag der Kräfte $|\vec{F}_A|$, $|\vec{F}_B|$ und $|\vec{F}_C|$. ●

14.2 Im Schwerpunkt S des Sonnensegels soll eine zusätzliche Aufhängung für ein Abspannseil zu einem Baum angebracht werden.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks und die

Länge des Stahlseiles, wenn das Seil im Punkt D(0/2/3,5) befestigt werden soll. ○

Lösungen

1.1

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & -6 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 26 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

⇒ Vektoren linear unabhängig, nicht paarweise kollinear und nicht komplanar.

1.2

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 8 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

⇒ Vektoren sind komplanar.

1.3

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 8 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 8 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 14 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & -36 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

⇒ Vektoren sind komplanar.

1.4

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

⇒ Vektoren sind komplanar.

2.1

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & \lambda = 2 \\ \text{(II)} & 0 = a \\ \text{(III)} & 0 = 0 \end{array}$$

⇒ a = 0

2.2

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & \lambda_1 + \lambda_2 = 2a \\ \text{(II)} & \lambda_1 + a\lambda_2 = 2 \\ \text{(III)} & a\lambda_1 - \lambda_2 = -1 \end{array}$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = 2a - \lambda_2$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 2a - \lambda_2 + a\lambda_2 = 2 \Rightarrow (a-1)\lambda_2 = 2 - 2a$$

$$\text{(III)} \Rightarrow 2a^2 - a\lambda_2 - \lambda_2 = -1 \Rightarrow (-a-1)\lambda_2 = -1 - 2a^2$$

$\Rightarrow$ es gibt kein a ;

2.3

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & 0 = a \\ \text{(II)} & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{(III)} & a\lambda_2 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ es gibt kein a ;

3

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & | & 0 \\ 3 & 6 & 12 & | & 0 \\ -9 & 12 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} & \text{(I)} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & | & 0 \\ 0 & 27 & 27 & | & 0 \\ 0 & 99 & 153 & | & 0 \end{pmatrix} & \text{(I)} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & | & 0 \\ 0 & 27 & 27 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1458 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig und damit nicht komplanar.

4

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \begin{pmatrix} a & a+3 & a+6 & | & 0 \\ a+1 & a+4 & a+7 & | & 0 \\ a+2 & a+5 & a+8 & | & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{a \neq 0} \begin{array}{lll} \text{(I)} & \begin{pmatrix} a & a+3 & a+6 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & -6 & -12 & | & 0 \end{pmatrix} & \text{(I)} & \begin{pmatrix} a & a+3 & a+6 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Das LGS besitzt für alle $a \in \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig und damit komplanar.

5

$$\begin{array}{lll}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 1+t & 0 \end{array} \right) & \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -16 & 3+3t & 0 \end{array} \right) & \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -16 & 3+3t & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4+t & 0 \end{array} \right) & \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 12+3t & 0 \end{array} \right) & \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -204-60t & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$-204-60t=0 \Rightarrow t=-3,4$$

$t=-3,4$: Vektoren sind linear abhängig

$t \in \mathbb{R} \setminus \{-3,4\}$: Vektoren sind linear unabhängig

6.1

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 (\vec{a} - \vec{b}) + \lambda_2 (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} + (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{(I)} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1$$

$$\text{(II)} \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig

6.2

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) + \lambda_2 (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{2} \lambda_1 - \lambda_2 \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2} \lambda_1 + \lambda_2 \right) \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{(I)} \frac{1}{2} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2} \lambda_1$$

$$\text{(II)} \frac{1}{2} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig

7.1

$$\vec{EG} = \vec{EA} + \vec{AG} = -\vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a}$$

$$\vec{MS} = \vec{MC} + \vec{CS} = \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{2}{3} \vec{CM}_2 \quad (\text{M}_2 \text{ Mittelpunkt von } [\vec{EB}])$$

$$\vec{MS} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3} \left[-\vec{b} + \frac{1}{2} (-\vec{a} + \vec{c}) \right] = \frac{1}{6} \vec{a} - \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

7.2

$$\lambda_1 \vec{EG} + \lambda_2 \vec{MS} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{6}\lambda_2\right)\vec{b} + \left(-\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2\right)\vec{c} = \vec{0}$$

$$(I) \quad \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2 = 0$$

$$(II) \quad -\frac{1}{6}\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$(III) \quad -\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2$$

$\Rightarrow \vec{EG}$ und $\vec{MS}$ sind linear unabhängig

$$8 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

9.1

$$\begin{array}{lll}
 (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 0 \\ 2 & -2k & 0 & | & 0 \end{pmatrix} & (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & -4k-2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} & (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & 4k^2+2k & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\
 (II) & (II) & (II) \\
 (III) & (III) & (III)
 \end{array}$$

$$4k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k(4k + 2) = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \quad k_2 = -0,5$$

$\Rightarrow$ Das LGS besitzt für $k = 0$ und $k = -0,5$ unendliche viele Lösungen

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig und bilden damit keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

9.2

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right) & \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) & \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) & \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & -6 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(III)} \Rightarrow \lambda_2 = -3 & \text{(II)} \Rightarrow \lambda_3 = -6 & \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = 4,5 \\
 \Rightarrow \vec{u}_B = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

10.1

$$\begin{array}{lll}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) & \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) & \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 9 & 0 \end{array} \right) & \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) & \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & k & 4 & 0 \end{array} \right) & \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2-2k & 0 \end{array} \right) & \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2k-3 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$2k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1,5$$

$\Rightarrow$ Das LGS besitzt für $k = 1,5$ unendliche viele Lösungen

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig und bilden damit keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

10.2

$$\begin{array}{lll}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) & \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) & \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 9 & -15 \end{array} \right) & \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) & \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 4 & -4 \end{array} \right) & \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 6 & -6 \end{array} \right) & \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -7 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{1}{7} & \text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = 5\frac{1}{7} & \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{52}{7} \\
 \Rightarrow \vec{u}_B = \begin{pmatrix} \frac{52}{7} \\ \frac{36}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

11.1 Richtig.

11.2 Falsch. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ müssen dazu nicht unbedingt linear unabhängig sein

11.3 Richtig.

11.4 Richtig.

11.5 Falsch. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ können trotzdem in einer Ebene liegen

11.6 Richtig.

11.7 Richtig.

12.1

$\overline{D_1 D_3} = \overline{G_2 D_3}$, weil beide Strecken eine Diagonale einer Würfel­fläche sind und damit muss das Dreieck $D_1 G_2 D_3$ gleichschenkelig sein.

12.2

$$\text{Mittelpunkt von } [D_1 G_2]: \vec{m} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{D_1 G_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{D_1 G_2}| = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{MD_3} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{MD_3}| = \sqrt{13,5}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{13,5} = 4,5\sqrt{3} \approx 7,79$$

12.3

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{D_1 D_2} \cdot \overline{D_2 G_2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5 \quad h = \overline{D_2 D_3} = 3$$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \cdot 3 = 4,5$$

$$V_{\text{Würfel}} = 27$$

$\Rightarrow$ Pyramidenvolumen nimmt etwa 16,7% ein.

12.4 A(3/0/2), B(1/0/0), C(0/1/0), D(0/3/2), E(1/3/3), F(3/1/3)

12.5

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -2 \cdot \vec{DE} = \vec{AB}$$

$\Rightarrow \vec{AB}$ und $\vec{DE}$ sind linear abhängig.

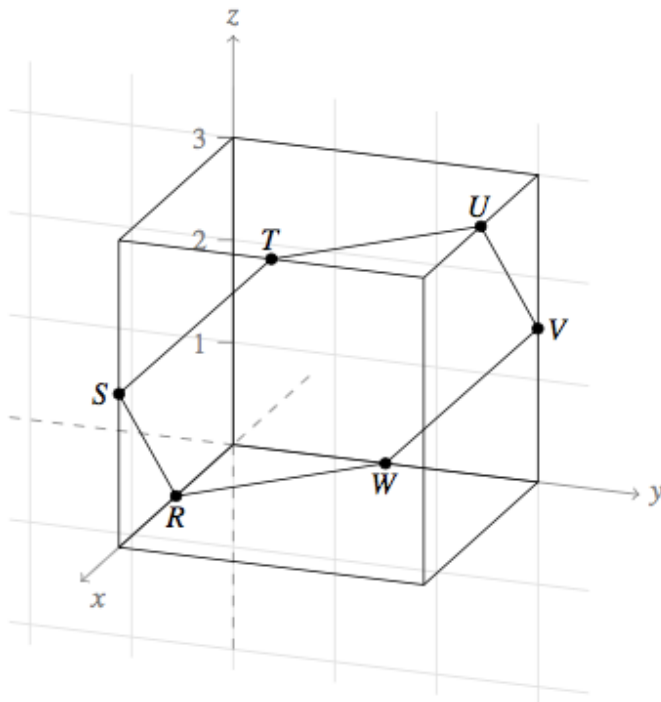
12.6

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Die Vektoren $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ und $\vec{DE}$ liegen in einer Ebene, sind also komplanar.

12.7

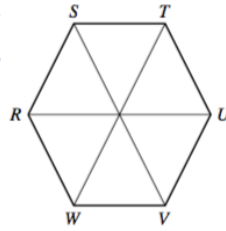


$$U(1,5|3|3), V(0|3|1,5), W(0|1,5|0)$$

12.8

$$\overline{RS} = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} = \sqrt{4,5}$$

$$A = 6 \cdot \frac{\overline{RS}^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4} \sqrt{3}$$



12.9

$$\overrightarrow{G_1 D_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{G_2 D_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{G_3 D_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}: \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 18 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{1}{6} \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{6}$$

$$\overrightarrow{CD}: \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 18 & 6 \end{array} \right)$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = 0 \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{DE}: \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & 18 & 18 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{6} \quad \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{6} \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}$$

13.1 C(0/10/5)

13.2

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{Dach}} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = 5 \cdot 10 = 50 \text{ m}^2$$

$$13.3 \quad \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6,5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(2/5/6,5)$$

13.4

$$\begin{aligned}
 &S_1(0/0/x_3) \quad S_2(0/10/x_3) \\
 &\vec{AS_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ x_3 - 8 \end{pmatrix} \quad |\vec{AS_1}| = \sqrt{16 + x_3^2 - 16x_3 + 64} = \sqrt{x_3^2 - 16x_3 + 82} \\
 &|\vec{AS_1}| = 10 \Rightarrow x_3^2 - 16x_3 + 82 = 100 \\
 &\Rightarrow x_3^2 - 16x_3 - 18 = 0 \Rightarrow x_{3_1} \approx 17,06 \quad (x_{3_2} \approx -1,06) \\
 &\Rightarrow S_1(0/0/17,06) \quad S_2(0/10/17,06)
 \end{aligned}$$

13.5

$$\begin{aligned}
 |\vec{AD}| = 5 \quad |\vec{AS_1}| &= \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9,06 \end{pmatrix} \right| = 9,9 \\
 \Rightarrow |\vec{F_s}| &\approx 6667 \text{ N} \quad |\vec{F_D}| \approx 3333 \text{ N}
 \end{aligned}$$

14.1

Die Summe aller Kräfte ist null: $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_W = \vec{0}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 0,18 \\ -1,26 \\ 6 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1,7 \\ -0,2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \\ -100 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,18 & -1,7 & -3 & -500 \\ -1,26 & -0,2 & 1 & -100 \\ 6 & -2 & 1 & 400 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0,18 & -1,7 & -3 & -500 \\ 0 & -2,178 & -3,6 & -648 \\ 0 & 9,84 & 18,18 & 3072 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0,18 & -1,7 & -3 & -500 \\ 0 & -2,178 & -3,6 & -648 \\ 0 & 0 & -4,17204 & -314,496 \end{array} \right)$$

$$(III) \Rightarrow c \approx 75,38 \quad (II) \Rightarrow b \approx 172,92 \quad (I) \Rightarrow 111,74$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_A| = \left| 111,74 \cdot \begin{pmatrix} 0,18 \\ -1,26 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 685,65$$

$$|\vec{F}_B| = \left| 172,92 \cdot \begin{pmatrix} -1,7 \\ -0,2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 455,22$$

$$|\vec{F}_C| = \left| 75,38 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 250,01$$

14.2

$$\vec{s} = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow s \left(1 / \frac{10}{3} / \frac{10}{3} \right)$$

$$|\vec{SD}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{101}}{6} \approx 1,67 \text{ m}$$